16. November 2005 **Abgabe: 23. November 2005**

Aufgabe 1: Es sei $X_1, \ldots, X_n$ die versteckte Kette eines HMM mit Emissionen $S_1, \ldots, S_K$. Geben Sie einen Algorithmus an, der für $i \leq n$, $y \in \mathcal{Z}$ und Beobachtungen $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{A}^n$ folgendes berechnet:

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{Z}^n} \mathrm{Ws}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, \mid X_i = y, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n)$$

Aufgabe 2: Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Markov-Kette. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch $X_n, \ldots, X_1$ eine Markov-Kette sein muss.

Aufgabe 3: Der Zufallsvektor X sei multinomialverteilt zu den Parametern $(n; p_1, \ldots, p_k)$. Das heißt: Es gilt $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_i \leq 1$ und $p_1 + \ldots + p_k = 1$, und für $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{N}_0$ mit $v_1 + \ldots + v_k = n$ ist

$$\mathrm{Ws}(X = (v_1, \ldots, v_k)) = \frac{n!}{v_1! \cdots v_k!} \cdot p^{v_1} \cdots p^{v_k}.$$

Beweisen Sie, dass $(\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_k) := (v_1/n, \ldots, v_k/n)$ der ML-Schätzer für $(p_1, \ldots, p_k)$ ist.

Anleitung: Setzen Sie $p_k := 1 - (p_1 + \ldots + p_{k-1})$ und zeigen Sie, dass für jedes $j < k$ die Ableitung $\frac{\partial}{\partial p_j} \log L_{v_1,\ldots,v_k}(p_1, \ldots, p_{k-1}, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i)$ als einzige Nullstelle $\hat{p}_j$ hat. (Dabei ist L die Likelihood-Funktion.) Begründen Sie warum diese Anleitung zum Erfolg führt.